9. Movimientos periódicos - energía

En el movimiento armónico simple **no existen fuerzas disipativas**, así que la energía mecánica total se conserva (permanece constante)

$$E = K + U = \text{cte.}$$

La energía cinética del cuerpo es $K = 1/2\ mv^2$, en tanto que su energía potencial es $U = 1/2\ kx^2$, así:

$$E = 1/2\ mv^2 + 1/2\ kx^2$$

Podemos relacionar esta energía total con la amplitud del movimiento, ya que cuando el cuerpo alcanza el punto x = A (o A), se detiene momentáneamente. Esto es, cuando $x = A$ (o $-A$), $v = 0$, y en este punto toda la energía es potencial, así que $E = 1/2\ kA^2$. Siendo E constante esta cantidad se tendrá en cualquier otro punto,

$$E = 1/2\ mv^2 + 1/2\ kx^2$$

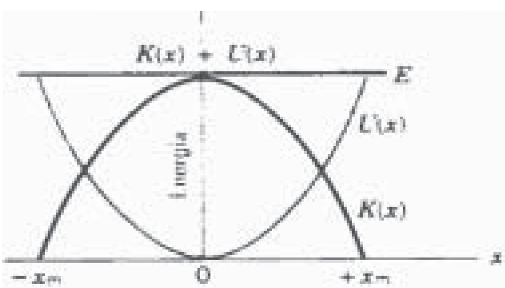

Figura 27. Variaciones de energía cinética, potencial y total de un oscilador armónico, como función de la posición.

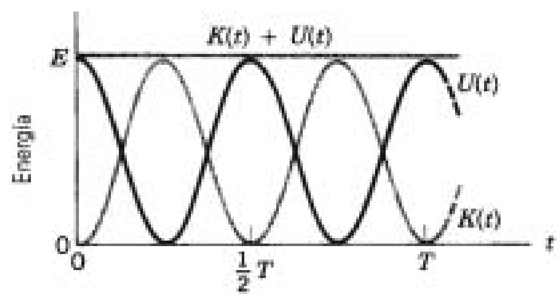

Figura 28. Variaciones de energía cinética, potencial y total de un oscilador armónico, como función del tiempo.

De la anterior expresión, si despejamos v,

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

Nota: De la anterior ecuación podemos obtener una expresión para la velocidad máxima, ya que haciendo x = 0, tendremos

$$v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La ecuación que relaciona velocidad con posición puede utilizarse para obtener mayor información acerca del MAS. Si sustituimos v por dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\,(A^2 - x^2)$$

si a continuación, separamos las variables,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \int dt$$

e integrando,

siendo φ una constante de integración. Si ahora despejamos x y utilizamos el hecho de que para cualquier ángulo θ, cos(-θ) = cos θ, tendremos:

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right)$$

La expresión anterior pudo haberse escrito en términos de una función seno en vez de coseno, usando la identidad $\cos\theta = \mathrm{sen}(\theta + \pi/2)$ y de aquí que podamos concluir que en el movimiento armónico simple, la posición es una función sinusoidal del tiempo.

También a partir de esta expresión es posible obtener expresiones para la velocidad y la aceleración, ya que:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = -\omega A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) \qquad\qquad a = -\omega^2 A\cos\,(\omega t + \varphi)$$

Por otro lado la función coseno se repite cuando el argumento de la función se incrementa en 2π radianes. Así que si iniciamos a t = 0, el tiempo T al cual se completa un ciclo está dado por:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, T = 2\pi \quad ó \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

De esta última expresión podemos ver que el movimiento está determinado por la masa m y la constante de fuerza k y que no depende de la amplitud o de la energía total. Recordando la relación entre la frecuencia y el período $f = \frac{1}{T}$, tendremos:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

así que la frecuencia angular, a su vez, estaría dada por:

$$\omega = 2 f$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es conveniente insistir que en el MAS la frecuencia o el período no dependen de la amplitud.

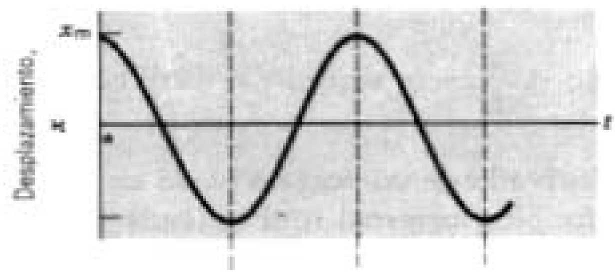

Figura 29. Gráfica del desplazamiento de una partícula en movimiento armónico simple.

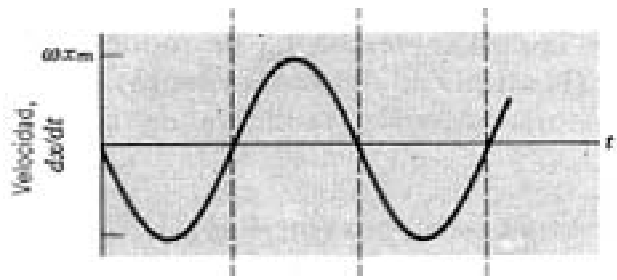

Figura 30. Gráfica de la velocidad de una partícula en movimiento armónico simple.

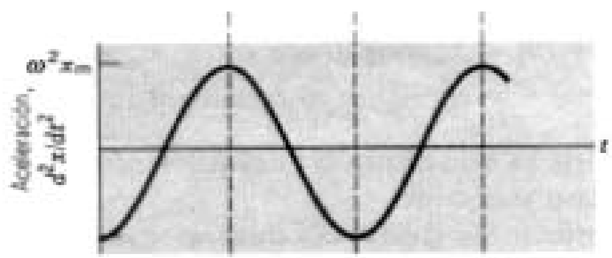

Figura 31. Gráfica de la aceleración de una partícula en movimiento armónico simple.

Ecuación del MAS

Desde un punto de vista dinámico la única fuerza que actúa en un MAS es de la forma F = -*kx*, de tal manera que de acuerdo a la segunda ley de Newton podemos escribir:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ó

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

esta última expresión es la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple. Su *solución debe ser de tal forma que satisfaga dicha ecuación, en particular debe ser una función cuya segunda derivada sea el negativo de la misma función, con excepción del factor constante k/m.* Como ya se vio con anterioridad las funciones seno y coseno cumplen con esta condición, así que proponemos la solución de la forma:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

con la condición de que la constante ω sea tal que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial vemos que en efecto la satisface.