4. Mecánica Rotacional

Cinemática Rotacional: *(Conceptos básicos)*

- Radián
- Velocidad angular
- Aceleración angular
- Frecuencia y período
- Velocidad tangencial
- Aceleración tangencial
- Aceleración centrípeta

Torca

El aplicar una fuerza a un cuerpo puede producir varias cosas; puede incrementar su velocidad, detenerlo, hacerlo girar o una combinación de las anteriores. Una experiencia tan sencilla como el abrir una puerta nos enseña que la fuerza utilizada puede producir diferentes aceleraciones angulares dependiendo de donde se aplique la fuerza a la puerta y de su dirección (de la fuerza).

Todo esto nos lleva a la posibilidad de definir un nuevo concepto, la "*torca*", que en analogía a la fuerza en el movimiento de traslación, nos permitirá predecir el movimiento de rotación de los cuerpos.

Podemos definir la torca como la medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza a producir o a modificar el movimiento rotacional de un cuerpo. Matemáticamente: $\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$

Aquí, $\bar{r}$ representa el *vector deposición* del punto de aplicación de la *fuerza* $\bar{F}$, la *torca* resultante $\bar{\tau}$ apuntará en una dirección perpendicular al plano que contiene a los vectores de posición y fuerza. Por otro lado recordando que la magnitud del producto vectorial es:

$$\tau = r\,F\,sen\,\theta$$

donde θ representa el ángulo formado entre los vectores de posición y fuerza, podremos escribir esta última expresión como:

$$\tau = F\,l$$

siendo $l = r\,sen\,\theta$ lo que se conoce comúnmente como el "*brazo de palanca*".

Las unidades de la torca en el Sistema Internacional son *metro por Newton* las cuales son dimensionalmente idénticas alas del trabajo, pero se debe tener bien claro que estamos manejando conceptos fisicos **totalmente diferentes**.

Momento angular

También, en analogía con el movimiento de traslación, donde aparece el cóncepto de impulso, en el movimiento de rotación podremos hablar de una cantidad equivalente: el momento angular.

Matemáticamente; $\bar{l} = \bar{r}\, X\, \bar{p}$ (ver figura).

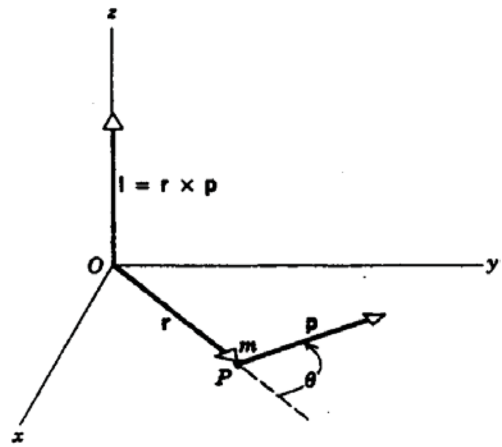


Figura 15. Momento angular de una partícula.

Para una partícula cualquiera su momento angular $\bar{l}$ (kg.m^2/s) respecto al origen de un sistema de referencia, es igual al producto vectorial del vector de posición de la partícula $\bar{r}$ (m) por el ímpetu $\bar{p}$ (kg.m/s). Este momento angular es perpendicular al plano que contiene a los vectores de posición e ímpetu.

Como en el movimiento de traslación, donde se cumplía que la fuerza es igual a la variación del ímpetu en el tiempo, podemos encontrar una estrecha relación entre la torca y el momento angular, ya que si derivamos el momento angular respecto al tiempo tendremos:

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}\ X\ \bar{p})$$

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = \bar{r}\ X\ \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}\ X\ \bar{p} \qquad y\ como\ \frac{d\bar{r}}{dt}\ X\ \bar{p} = 0$$

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = r\ X\ \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = \bar{r}\ X\ \bar{F}$$

$$\text{o sea: } \frac{d\bar{l}}{dt} = \bar{\tau}$$

Un aspecto importante a señalar es el hecho de si la torca es nula, no habrá cambio en el momento angular, esto es l permanece constante, lo cual nos lleva al principio de la conservación del momento angular.

Cuando la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema permanece constante.

Momento de inercia

La primera ley de Newton nos dice que todos los cuerpos tienden a estar en reposo o a moverse en línea recta con velocidad constante. En la práctica encontramos que existe una ley similar para la rotación:

Todo objeto en rotación permanece girando hasta que un agente externo (una "torca"), modifica dicho estado, de aquí que podamos hablar de que un cuerpo en rotación tiene cierta "*inercia de rotación*".

De la misma manera que la inercia en el movimiento de traslación depende de la masa (*de hecho la inercia se identifica con la masa*), la inercia rotacional también depende de la *masa*, pero en particular de ***como está distribuida alrededor del eje de rotación***. Mientras más grande sea la distancia entre el eje de rotación y la mayor concentración de la masa, mayor será la inercia rotacional. A esta distribución se le conoce como ***momento de inercia***.

Para poder hacer una cuantificación del *momento de inercia* de un cuerpo en particular consideraremos un cuerpo rígido que gira respecto a un eje vertical. Imaginemos al sólido como un conjunto de partículas y consideremos la energía cinética de ellas. Para una partícula de masa m que se mueve en un círculo de radio r a una velocidad angular ω, su velocidad lineal tangencial será $v = \omega r$ y consecuentemente su energía cinética será $1/2\ mv^2 = 1/2\ mr^2\omega^2$.

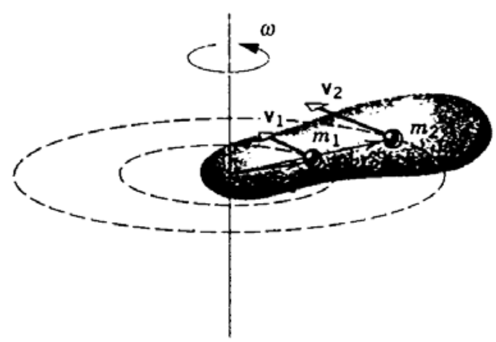


Figura 16. Momento de inercia de un cuerpo rígido.

Si ahora queremos determinar la energía cinética total del cuerpo que gira, esta será igual a la suma de las energías cinéticas de todas las partículas de que se compone el cuerpo, consecuentemente:

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots$$
$$E_T = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2\right) \omega^2$$

Como hemos partido del supuesto de que el cuerpo es rígido, todas las partículas tendrán la misma velocidad angular lo que permite su factorización en la ecuación anterior.

Ahora bien, la cantidad dentro del paréntesis es la suma de los productos de la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación. esta cantidad se denomina "*momento de inercia*" del cuerpo con respecto a un eje particular de rotación y se representa por el símbolo I.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Habrá que recalcar que el momento de inercia depende del eje alrededor del cual esté girando el cuerpo así como de la forma en que esté distribuida su masa.

El momento de inercia se expresa generalmente en kg.m^2.

Si combinamos las dos ecuaciones anteriores podemos obtener una expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido como,

$$K_r = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Esta última expresión es análoga a la de energía cinética de traslación de un cuerpo (K_t) y podemos reconocer que así como la velocidad angular ω es análoga a la velocidad lineal v, el momento de inercia *I* es análogo a la masa.

Cuando tratamos de determinar el momento de inercia de un cuerpo rígido, es fácil visualizar que sería imposible tratar de realizar la sumatoria de los productos de las masas y el cuadrado de sus distancias al eje de rotación. En este caso podemos ayudarnos del cálculo matemático, considerando que la masa (δm) de cada una de las partículas es muy pequeña, tendremos,

$$I = \lim_{\delta x \to 0} \sum r_i^2 \, \delta m_i$$

lo cual nos permite manejar esta expresión como una integral:

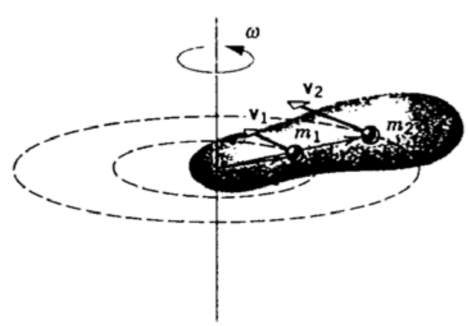
$$I = \int r^2 dm$$

A partir del concepto de momento de inercia es posible obtener nuevas expresiones que incorporen esta idea y la relacionen con otras variables rotacionales.

Por ejemplo, consideremos un cuerpo rígido que gira en un plano horizontal(ver figura). Tomando una partícula, la magnitud de su momento angular estará dada por:

$$l = mvr \operatorname{sen} \theta$$

$$l = mv_t r$$



donde v_t representa la velocidad tangencial de la partícula, misma que puede ser sustituida por su equivalente ωr, así que la magnitud de su momento angular sería,

$$l = m(v\omega)r$$

$$l = mr^2\omega$$

*si ahora consideramos **el total** de las partícidas que conforman al sólido, tendremos:*

$$\overline{L} = \sum \overline{l}_i$$

$$\overline{L} = (\sum m_i r_i^2)\,\overline{\omega}$$

$$\overline{L} = I\overline{\omega}$$

lo cual nos da una expresión para el momento angular análoga a la del impulso.

De una manera similar se podría demostrar que $\overline{\tau} = I\overline{\alpha}$ lo cual es el análogo a la segunda ley de Newton para el caso de un cuerpo que mantenga su momento de inercia constante, ya que $\overline{a} = r\overline{\alpha}$