3. Fuerza e ímpetu

El concepto de **ímpetu** *(cantidad de movimiento o momentum)* surge formalmente en 1969 y se define como:

El ímpetu de un cuerpo es el producto de la masa del cuerpo por su vector velocidad

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

Es claro que siendo la *velocidad* una magnitud vectorial, el *ímpetu* tendrá también características vectoriales. Por otro lado, en el Sistema Internacional, sus unidades serán *kg* • m/s.

Parte de la importancia del concepto de *ímpetu* está en su estrecha relación con el concepto de *fuerza* como se ha manejado a través de la segunda ley de Newton, ya que si mantenemos la *masa* constante y recordando que, $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ podremos escribir:

$$\sum \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

y suponiendo la masa constante,

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

La masa no es constante, por ejemplo, en el movimiento de un cohete espacial.

$$\therefore \frac{d\bar{p}}{dt} = m\bar{a}$$

Conservación del ímpetu

El concepto de *ímpetu* es de especial relevancia en situaciones donde tenemos dos o más cuerpos que interactúan entre sí, en estas condiciones habrá que recordar la existencia de *fuerzas internas* v *externas*. En un sistema las *fuerzas* que los diferentes cuerpos ejercen entre ellos se denominan *fuerzas internas*, en tanto que las *fuerzas* ejercidas sobre cualquier parte del sistema por un agente exterior son denominadas *fuerzas externas*. Si sobre un sistema no actúan *fuerzas externas* se dice que es un *sistema aislado*.

En un sistema de cuerpos habrá que considerar el ímpetu total del sistema como la suma de los ímpetus parciales asociados a cada cuerpo, esto es:

$$\bar{P} = \sum_{i=l} \bar{p}_1 =$$

$$\bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \ldots \bar{p}_n$$

Al hablar de las fuerzas que propician el cambio del ímpetu habría que considerar tanto las fuerzas externas como las internas, sin embargo si la suma de las fuerzas externas es nula, las fuerzas internas no contribuyen a la suma así que la variación del ímpetu es cero. La consideración anterior se conoce como la "*ley de conservación del ímpetu*"

El ímpetu total de un sistema es constante cuando el vector suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es cero.

Precaución: *Al calcular el ímpetu de un sistema no debemos olvidar que esta es una magnitud vectorial, consecuentemente debemos utilizar la suma vectorial del ímpetu de cada uno de los componentes del sistema. La forma más sencilla de lograr esto es utilizar las componentes sobre cada uno de los ejes coordenados.*

Ejemplo: determinar el ímpetu total de un sistema formado por un corredor de 60 kg que se mueve hacia el Oeste a 8 m/s y otro de 75 kg que se mueve hacia el Sur a razón de 6 m/s.

—> Para resolver este problema podemos ubicar a ambos corredores en un sistema de referencia constituido por coordenadas cartesianas,

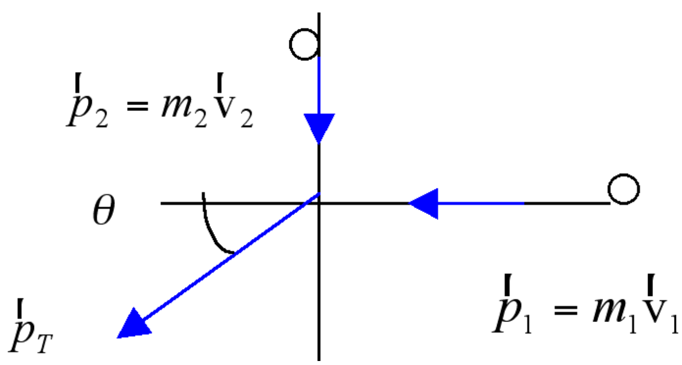

Figura 12. Impetu total en un sistema de fuerzas

entonces $\overline{p}_1 = m_1\,\overline{v}_1 = (60)(-8\,i\,)$

en tanto que $\overline{p}_2 = m_2\overline{v}_2 = (75)(-6\,j\,)$

de tal manera que el ímpetu total será $\overline{p}_T = \overline{p}_1 + \overline{p}_2$

esto es $\overline{p}_T = -\,480i - 450j$ (kg-m/s)

La magnitud de éste ímpetu del sistema será $|P_T| = \sqrt{(-\,480)^2 + (-\,450)^2} = 657.95$ (kg-m/s)

en tanto que su dirección $\theta = \tan^{-1}\dfrac{450}{480} = 43.15°$ (este ángulo se mide hacia abajo del eje negativo de las abscisas).

Colisiones

Como se señaló con anterioridad el concepto de ímpetu cobra especial relevancia cuando se trata de estudiar la interacción entre dos o más cuerpos, en particular es de especial interés el estudio de las colisiones.

Consideraremos dos tipos de colisiones básicas:

Colisiones elásticas: aquellas en los cuales los cuerpos se pueden deformar pero recuperan su forma original (choques entre dos balines de acero o dos bolas de billar).

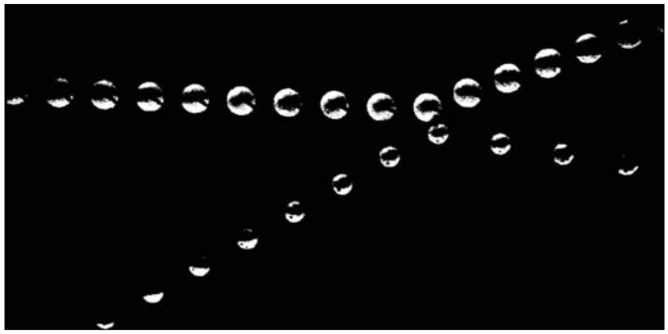

Fig. 13. Colisión entre esferas de acero de diferente masa

Colisiones inelásticas: aquellas en las cuales se produce una deformación permanente como consecuencia de la colisión (choque de dos autos o de esferas de plastilina).

En cualquiera de los dos casos se aplica el principio de conservación del ímpetu.

Consideremos la siguiente colisión elástica entre dos bolas de diferente masa:

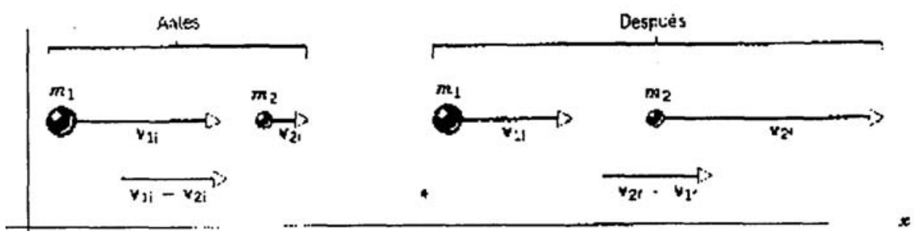

Figura 14. Conservación del ímpetu

Antes de la colisión el ímpetu del sistema es:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

en tanto que después de la colisión el ímpetu es:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

ya que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, tendremos que

$$p_i = p_f$$

por lo tanto,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Principio de acción y reacción

De acuerdo a la tercera ley de Newton las fuerzas entre dos cuerpos que interactúan (colisionan),

$$\bar{F}_A = -\bar{F}_B$$

Para cualquier intervalo de tiempo *dt*, tendremos:

$$F_A = \frac{d(m_A \bar{v}_A)}{dt} \qquad\qquad F_B = \frac{d(m_B \bar{v}_B)}{dt}$$

$$\therefore\ \bar{F}_A\, dt = d\,(m_A \bar{v}_A) \qquad\qquad \therefore\ \bar{F}_B\, dt = d\,(m_B \bar{v}_B)$$

basándonos en la relación entre las fuerzas:

$$\Delta(m_A \bar{v}_A) = -\Delta(m_B \bar{v}_B)$$

Si llamamos $\bar{v}_{1A}$, $\bar{v}_{1B}$ a las velocidades de los cuerpos al iniciar el intervalo de tiempo y v_{2A}, v_{2B} sus velocidades al final del intervalo y considerando que sus masas no se modifican tendremos:

$$m_A \bar{v}_{2A} - m_A \bar{v}_{1A} = -(m_B \bar{v}_{2B} - m_B \bar{v}_{2B})$$

finalmente, ordenando términos.

$$m_A \bar{v}_{1A} + m_B \bar{v}_{1B} = m_A \bar{v}_{2A} + m_B \bar{v}_{2B}$$

como se puede observar, esta última expresión representa la ley de la conservación del ímpetu para dos cuerpos, ya que el primer miembro es el ímpetu total de A y B al inicio del intervalo de tiempo y el segundo miembro representa el ímpetu total al final del intervalo. Esto nos permite comprobar que esta ley de conservación puede deducirse de las leyes de Newton.

Comentarios:

El hecho de que esta ley pueda deducirse de las leyes de Newton, genera la idea de que no es una ley independiente. Por otro lado, esta ley de conservación no puede utilizarse por sí misma para deducir la segunda y tercera leyes de Newton, ya que por si misma no genera el concepto de fuerza. En este sentido que no es independiente, es un caso muy particular de $\bar{F}_{ext} = 0$.

Sin embargo su estudio es importante porque no todas las situaciones físicas deben o pueden ser analizadas en términos de fuerzas y aceleraciones. Incluso en los problemas de colisiones más sencillos, seria extraordinariamente dificil medir las fuerzas instantáneas para permitir la aplicación de las leyes de Newton, pero este tipo de situaciones puede resolverse utilizando la ley de la conservación del ímpetu.

Impulso

El impulso es una cantidad estrechamente relacionada con el ímpetu y se define en la siguiente forma,

> **Cuando una fuerza constante $\bar{F}$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo de tiempo Δt, el impulso de esta fuerza, denominado J se define como**

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \bar{F}$$

El impulso $\bar{J}$ es una cantidad vectorial. En el SI las unidades de impulso son Newton•segundo (N•s). Y ya que 1 N=1 kg,m/s^2, una forma alterna de unidades para el impulso es kg.m/s, que son las mismas unidades del ímpetu. Este último hecho puede explicarse si recordamos que

$$\bar{P} = m\bar{v} \qquad \text{y} \qquad \bar{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

así el impulso puede escribirse como:

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt \qquad\qquad \bar{J} = \int_{v_1}^{v_2} md\bar{v}$$

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\bar{v}}{dt}dt \qquad\qquad \bar{J} = m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

Si la fuerza es constante, entonces la variación del ímpetu también será constante, en este caso esta variación será igual al cambio total del ímpetu $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$, y el impulso será $\Delta J = m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$

Es posible generalizar el concepto de impulso para considerar una fuerza que varíe en el tiempo. De nuevo escribiendo la segunda ley de Newton como $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$, e integrando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{p}}{dt}dt$$

$$\bar{J} = \int_{p_1}^{p_2} d\bar{p}$$

$$\bar{J} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$$

Colisiones elásticas *(Análisis Completo)*

Para realizar el análisis completo de una colisión perfectamente elástica, podemos considerar inicialmente una colisión entre dos objetos en una dimensión (dos carritos en un riel de aire, que chocan de frente).

Recordaremos que la expresión que representa la conservación del ímpetu está dada por

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

si a esto agregamos el hecho de que la energía mecánica, (en este casó la energía cinética) se conserva, tendremos

$$K_i = K_f$$

esto es:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v_{2i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}$$

Ahora bien si conocemos la masa y los valores de la rapidez inicial para cada cuerpo, podemos calcular los valores finales de la rapidez de cada uno de ellos mediante una manipulación algebraica de estas dos ecuaciones, obteniendo los siguentes resultados:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

Dichas ecuaciones, que son válidas en cualquier marco de referencia inercial, permiten predecir los valores de la rapidez final para cada uno de los cuerpos que colisionan elásticamente en una dimensión.

Ejercicios:

- *Obtener los valores de v_{1f} y v_{2f} cuando la colisión se realiza entre cuerpos de masas iguales*
- *Obtener las expresiones para v_{1f} y v_{2f} cuando el cuerpo m_2 está inicialmente en reposo*
- *Obtener las expresiones para v_{1f} y v_{2f} cuando $m_2 >> m_1$*
- *Obtener las expresiones para v_{1f} y v_{2f} cuando $m_1 >> m_2$*